

第三章 指数运算与指数函数

§1 指数幂的拓展 &
§2 指数幂的运算性质

基础满分

1. C 【解析】 $a > 0$, $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}} =$

$$\frac{a^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{a} \cdot a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{7}{6}}} = a^{-\frac{1}{12}}. \text{ 故 C}$$

正确.

2. A 【解析】根据实数指数幂的运算法则得原式 =

$$\frac{a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{5}{6}}} = \frac{a^{-\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{5}{6}}} =$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}. \text{ 故 A 正确.}$$

3. C 【解析】原式 = $\frac{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} +$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{3 \times (-\frac{1}{3})} + 2 - \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} + 10 + 2 -$$

$$\sqrt{3} = 12. \text{ 故 C 正确.}$$

4. D 【解析】 $\left(\frac{n}{m}\right)^7 = n^7 m^{-7} \neq n^7 m^{\frac{1}{7}}$,

故 A 错误;

$$\sqrt[12]{(-3)^4} = \sqrt[12]{3^4} = 3^{\frac{4}{12}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} \neq$$

$$\sqrt[3]{-3}, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\sqrt[4]{x^3 + y^3} = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{4}}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{9}} = (3^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}, \text{ 故 D}$$

正确.

5. $\frac{3}{2}$ 【解析】 $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} +$

$$(1.5)^{-2} = \sqrt{\frac{9}{4}} - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}} +$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{3}{2}.$$

6. $\frac{35}{8} + \pi$ 【解析】原式 = $4 + \pi - 3 +$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{4 \times \frac{3}{4}} = 1 + \pi + \frac{27}{8} = \frac{35}{8} + \pi.$$

易错警示

忽略 $\sqrt[n]{a^n}$ 中 n 的

奇偶

对于 $\sqrt[n]{a^n}$, 其结果需要根据 n 的奇偶来决定, 若 n 为奇数, 则 $\sqrt[n]{a^n} = a$; 若 n 为偶数, 则 $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

7. 【解】(1) 原式 = $1 - 3 + \sqrt[3]{8^2} - \sqrt{4} = 1 - 3 + 4 - 2 = 0.$

(2) 原式 = $-2a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - 1} =$

$$c^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = -2bc^2.$$

8. B 【解析】因为 $a + \frac{1}{a} = 3$, 所以 $a >$

$$0, a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} > 0, (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + \frac{1}{a} +$$

$$2 = 5, \text{ 所以 } a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}. \text{ 故 B}$$

正确.

9. C 【解析】 $10^{3x-2y} = \frac{10^{3x}}{10^{2y}} = \frac{(10^x)^3}{(10^y)^2} =$

$$\frac{3^3}{4^2} = \frac{27}{16}. \text{ 故 C 正确.}$$

10. 【解】因为 $2^x = 8^{y+1}$, 所以 $2^x = 2^{3(y+1)}$, 即 $x = 3(y+1)$. 又 $9^y = 3^{x-9}$, 所以 $3^{2y} = 3^{x-9}$, 即 $2y = x-9$.

$$\text{则 } \begin{cases} x=3(y+1), \\ 2y=x-9, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=21, \\ y=6, \end{cases} \text{ 故}$$

 $x+y$ 的值为 27.

11. 【解】因为 $a > 0$, 所以 $\frac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} =$

$$\frac{(a^{\frac{1}{3}})^2 - (b^{\frac{1}{3}})^2}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} =$$

$$\frac{(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}};$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^5}}{a^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{a}} = \frac{a^{\frac{5}{3}}}{a^1 \cdot a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{5}{3}-1-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}. \text{ 因为}$$

$$b > 8, \text{ 所以 } b^{\frac{1}{3}} > 2, \text{ 所以}$$

$$\sqrt{4-4b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{(2-b^{\frac{1}{3}})^2} = |2-$$

$$b^{\frac{1}{3}}| = b^{\frac{1}{3}} - 2, \text{ 所以 } \frac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} - \frac{\sqrt[3]{a^5}}{a^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{a}} +$$

$$\sqrt{4-4b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} - 2 = -2.$$

§1 & §2 考点训练

1. C 【解析】 $\frac{8^a}{2^{\frac{1}{2}b}} = 2^{3a-\frac{1}{2}b} = 2^{\frac{6a-b}{2}} =$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 故 C 正确.}$$

2. A 【解析】因为 $-8a^3 \geq 0$, 所以

$$a \leq 0, \text{ 所以 } \sqrt{-8a^3} = 2|a| \cdot$$

$$\sqrt{-2a} = -2a\sqrt{-2a}. \text{ 故 A 正确.}$$

3. A 【解析】 $\because 3 < \pi < 4$,

$$\therefore \sqrt{(\pi-4)^2} + \sqrt[3]{(3-\pi)^3} = 4 - \pi + 3 - \pi = 7 - 2\pi. \text{ 故 A 正确.}$$

4. C 【解析】 $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, 故 A 错误;

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{13}{6}}, \text{ 故 B 错误;}$$

$$(a\sqrt{b})^6 = a^6 b^3, \text{ 故 C 正确;}$$

$$a^{\frac{\pi}{3}} \cdot a^{-\frac{\pi}{3}} = a^0 = 1, \text{ 故 D 错误.}$$

5. B 【解析】原式 = $-\frac{1}{2} \cdot$

$$a^{-2+(-1)-(-3)} b^{-3+2-(-2)} = -\frac{1}{2} a^0 b =$$

$$-\frac{1}{2} b. \text{ 故 B 正确.}$$

6. C 【解析】 $4^x + 4^y = 2(2^x + 2^y) =$

$$(2^x + 2^y)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^y. \text{ 设 } 2^x + 2^y = t,$$

$$t > 0, \text{ 根据题意, } t^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^y = 2t,$$

$$\text{则 } 2 \cdot 2^x \cdot 2^y = t^2 - 2t, \text{ 又 } 0 < 2 \cdot 2^x \cdot$$

$$2^y \leq 2 \cdot \left(\frac{2^x + 2^y}{2}\right)^2, \text{ 即 } 0 < t^2 - 2t \leq \frac{t^2}{2},$$

$$\text{当且仅当 } 2^x = 2^y, \text{ 即 } x = y = 1 \text{ 时取}$$

$$\text{等号, 解得 } 2 < t \leq 4. \text{ 所以 } 2^{x-1} +$$

$$2^{y-1} = \frac{2^x + 2^y}{2} = \frac{t}{2} \in (1, 2], \text{ 所以}$$

$$2^{x-1} + 2^{y-1} \text{ 的值可以是 } \frac{3}{2}. \text{ 故 C}$$

正确.

7. $ab^{-\frac{3}{2}}$ 【解析】 $\because a>0, b>0$,

$$\therefore \sqrt{\frac{a^2}{b^3}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^3}} = \frac{a}{b^{\frac{3}{2}}} = ab^{-\frac{3}{2}}.$$

8. $\sqrt{13}$ 【解析】 $\because a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3$,

$$\therefore a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2} = \sqrt{(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2 + 4} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

9. $-\frac{5}{8}$ 【解析】 $0.064^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{7}{9}\right)^0 +$

$$\begin{aligned} & [(-2)^3]^{\frac{1}{3}} - 16^{-0.75} = \left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}} - \\ & 1 + (-2) - (2^4)^{-\frac{3}{4}} = \frac{5}{2} - 3 - \frac{1}{8} = -\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

10. $a^{\frac{6}{5}}$ 【解析】 $(a^2 \cdot \sqrt[5]{a^3}) \div (\sqrt{a} \cdot \sqrt[10]{a^9}) = (a^2 \cdot a^{\frac{3}{5}}) \div (a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{9}{10}}) =$

$$a^{2+\frac{3}{5}} \div a^{\frac{1}{2}+\frac{9}{10}} = a^{\frac{13}{5}} \div a^{\frac{14}{10}} = a^{\frac{13}{5}-\frac{7}{5}} = a^{\frac{6}{5}}.$$

11. 【解】原式 $= \left(\frac{27}{1\ 000}\right)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{\frac{125}{27}} -$

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \left(\frac{3}{10}\right)^{3 \times \frac{2}{3}} + \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = 0.09.$$

12. 【解】(1) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} + 12^{\frac{1}{2}} +$

$$2\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - (\pi-1)^0 = \frac{3}{2} +$$

$$2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 1 = \frac{9}{2}.$$

$$(2) \sqrt[3]{(-6)^3} + \sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4} +$$

$$8^{0.25} \times \sqrt[4]{2} + \sqrt{125} \div \sqrt[4]{25}$$

$$= -6 + \sqrt{3} - 1 + 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} + \frac{5^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sqrt{3} - 7 + 2 + 5$$

$$= \sqrt{3}.$$

§3 指数函数

基础满分

1. C 【解析】形如 $y=a^x (a>0, a \neq 1)$ 的函数为指数函数, $y=2 \cdot 3^x$ 的 3^x 系数不为 1; $y=3^{x+1}$ 的指数不是 x ; $y=x^3$ 是幂函数; 只有 $y=3^x$ 符合指

数函数定义. 故 C 正确.

易错警示 忽略指数函数的特征

判断指数函数时要注意以下几点:

- ①底数 a 为大于 0 且不等于 1 的常数;
- ②指数位置是自变量 x , 且 x 的系数是 1;
- ③ a^x 的系数是 1.

2. D 【解析】函数 $f(x)=2^x$ 的定义域为 \mathbf{R} . 故 D 正确.

3. B 【解析】根据指数函数的特征, 结合本题条件可得 $\begin{cases} a^2-5a+7=1, \\ 6-2a=0, \end{cases}$ 解得 $a=3$. 故 B 正确.

4. D 【解析】由题意可得 $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{y|y>0\}$, 所以 $A \cap B = \{1\}$, 故 D 正确.

5. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 【解析】设指数函数的解析式为 $f(x)=a^x (a>0$ 且 $a \neq 1)$, 所以 $a^2=\frac{1}{4}$, 解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=-\frac{1}{2}$ (舍), 即 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

6. C 【解析】因为函数 $f(x)=a\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+b$ 的图象过原点, 所以 $a+b=0$. 又因为函数 $f(x)$ 的图象无限接近直线 $y=-1$, 但又不与该直线相交, 结合指数函数的特点可得 $b=-1$, 则 $a=1$. 故 C 正确.

7. C 【解析】直线 $x=1$ 与函数图象的交点的纵坐标从上到下依次为 c, d, a, b , 由 $\sqrt{3} > \frac{5}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ 可得 $c=\sqrt{3}, d=\frac{5}{4}, a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{3}$. 故 C 正确.

8. A 【解析】由题中图象知函数 $y=$

a^x 为减函数, 则 $0<a<1$. 二次函数 $y=ax^2+x$ 图象的顶点的横坐标为 $x=-\frac{1}{2a}$. $\because 0<a<1, \therefore \frac{1}{2a}>\frac{1}{2}, -\frac{1}{2a}<-\frac{1}{2}$, 即横坐标的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$. 故 A 正确.

9. A 【解析】由函数 $f(x)=3^x+b$ 的图象经过第一、三、四象限, 可得 $b<-1$, 所以 $g(b)=f(b)-f(b-1)=3^b-3^{b-1}=3^b \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3} \cdot 3^b < \frac{2}{3} \cdot 3^{-1}=\frac{2}{9}$. 又因为 $\frac{2}{3} \cdot 3^b > 0$, 所以 $g(b)=f(b)-f(b-1)$ 的取值范围为 $\left(0, \frac{2}{9}\right)$. 故 A 正确.

10. B 【解析】函数 $f(x)=a^{x-m}+n$ (其中 $a>0, a \neq 1, m, n$ 为常数) 的图象恒过定点 $(3, 2)$, 即 $2=a^{3-m}+n$ 恒成立, 则有 $\begin{cases} 3-m=0, \\ 1+n=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=3, \\ n=1, \end{cases}$ 所以 $m+n=4$. 故 B 正确.

11. D 【解析】因为函数 $f(x)=2^x$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\max}=f(2)=2^2=4$. 故 D 正确.

12. C 【解析】 $\because 1<2^a<2^b<2, \therefore 0<a<b<1, \therefore$ 指数函数 $y=a^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, $\therefore a^a>a^b$. 又 \because 幂函数 $y=x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore a^a<b^a, \therefore a^b<a^a<b^a$. 故 C 正确.

13. D 【解析】 $f(mn)=a^{mn}$, 而 $f(m) \cdot f(n)=a^m \cdot a^n=a^{m+n}$, 故 A 错误; $f(m+n)=a^{m+n}, f(m)+f(n)=a^m+a^n$, 故 B 错误; 因为 $f\left(\frac{m+n}{2}\right)=a^{\frac{m+n}{2}}, f(\sqrt{mn})=a^{\sqrt{mn}}$, 由 $\frac{m+n}{2} \geq \sqrt{mn}$ (当且仅

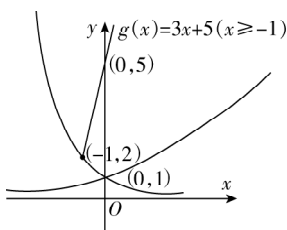
当 $m=n$ 时等号成立), 所以当 $0 < a < 1$ 时, $f\left(\frac{m+n}{2}\right) \leq f(\sqrt{mn})$, 故 C 错误;

$f\left(\frac{m+n}{2}\right) = a^{\frac{m+n}{2}} = \sqrt{a^m \cdot a^n}$, $\frac{f(m)+f(n)}{2} = \frac{a^m+a^n}{2}$, 由基本不等式可得 $\frac{a^m+a^n}{2} \geq \sqrt{a^m \cdot a^n}$ (当且仅当 $m=n$ 时等号成立), 故 D 正确.

易错警示 忽略对含参底数的讨论

在通过指数函数的单调性比较大小时, 如果底数不确定, 一定要注意对底数进行分类讨论. 比如本题的 C 选项, 当 $0 < a < 1$ 时, $f\left(\frac{m+n}{2}\right) \leq f(\sqrt{mn})$; 当 $a > 1$ 时, $f\left(\frac{m+n}{2}\right) \geq f(\sqrt{mn})$.

- 14. D** 【解析】当 $a > 1$ 时, 指数函数 $f(x) = a^x$ 单调递增, 且呈爆炸性增长, 所以指数函数 $f(x) = a^x$ 的图象和函数 $g(x) = 3x + 5 (x \geq -1)$ 的图象一定会相交;
- 当 $0 < a < 1$ 时, 指数函数 $f(x) = a^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 所以只需 $a^{-1} \geq g(-1) = 3 \times (-1) + 5 = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ 即可, 解得 $0 < a \leq \frac{1}{2}$. 所以 a 的范围为 $\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$. 故 D 正确.



- 15. 【解】** (1) $\because f(x)$ 的图象关于原点对称, $\therefore f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-x) + f(x) = 0, \therefore a \cdot 2^{-x} - 2^x + a \cdot 2^{-x} -$

$2^x = 0, \therefore (a-1) \cdot (2^{-x} + 2^x) = 0, \therefore a = 1$. 令 $g(x) = 2^x - 2^{-x} + \frac{3}{2} = 0$, 则 $2 \cdot (2^x)^2 + 3 \cdot (2^x) - 2 = 0$, $\therefore (2^x + 2) \cdot (2 \cdot 2^x - 1) = 0$. 又 $\because 2^x > 0, \therefore 2 \cdot 2^x - 1 = 0$, 即 $x = -1$. (2) $h(x) = a \cdot 2^x - 2^{-x} + 4^x + 2^{-x}$, $x \in [0, 1]$, 令 $2^x = t \in [1, 2]$, $h(x)$ 可转化为 $\varphi(t) = t^2 + at$, $t \in [1, 2]$, 图象的对称轴为直线 $t_0 = -\frac{a}{2}$.

\therefore 当 $-\frac{a}{2} \leq \frac{3}{2}$, 即 $a \geq -3$ 时, $\varphi(t)_{\max} = \varphi(2) = 4 + 2a = -2, \therefore a = -3$;

\therefore 当 $-\frac{a}{2} > \frac{3}{2}$, 即 $a < -3$ 时, $\varphi(t)_{\max} = \varphi(1) = 1 + a = -2, \therefore a = -3$ (舍).

综上, 实数 a 的值为 -3 .

- 16. C** 【解析】某湖泊中的蓝藻每天以 6.25% 的增长率呈指数增长, 经过 30 天后, 该湖泊的蓝藻数大约为原来的 6 倍, 设湖泊中原来蓝藻数量为 a , 则 $a \cdot (1 + 6.25\%)^{30} = 6a$, 所以经过 60 天后该湖泊的蓝藻数量为 $y = a(1 + 6.25\%)^{60} = a[(1 + 6.25\%)^{30}]^2 = 36a$. 即经过 60 天后该湖泊的蓝藻数大约为原来的 36 倍. 故 C 正确.

- 17. D** 【解析】依题意, 10 分钟后细菌的个数为 2^1 个, 20 分钟后, 细菌的个数为 2^2 个, 每过 10 分钟细菌数量变为原来的 2 倍, 所以 2 小时, 即 120 分钟后, 细菌的个数应为 2^{12} 个. 故 D 正确.

- 18. C** 【解析】由题意得 $(1-p)^{5730} = \frac{1}{2}$, 则 $1-p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$, 解得 $p = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$. 故 C 正确.

- 19. 【解】** \because 每 3 秒自身复制一次, 复制后所占内存是原来的 2 倍, $\therefore n$ 个 3 秒后所占内存是 $1 \times 2^n = 2^n \text{ MB}$, $\therefore 2^n = 16 \times 2^{10} = 2^{14}, \therefore n = 14, \therefore 3 \times 14 = 42$ (秒). \therefore 该病毒占据内存 16GB 时的开机时间为 42 秒.

7.4 重难点上分

- 1. B** 【解析】依题意有 $\begin{cases} x-4 \neq 0, \\ 2^x-4 \geq 0, \end{cases}$ 解得 $x \geq 2$ 且 $x \neq 4$, 所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $[2, 4) \cup (4, +\infty)$. 故 B 正确.

- 2. ABD** 【解析】函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x+3}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 故 A 正确; $\because x^2+4x+3 = (x+2)^2 - 1 \geq -1, \therefore 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x+3} \leq 2$, 即函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x+3}$ 的值域为 $(0, 2]$, 故 B 正确;
- $\because y = \left(\frac{1}{2}\right)^u$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, $u = x^2+4x+3$ 在 $(-\infty, -2]$ 上单调递增, 在 $[-2, +\infty)$ 上单调递减, \therefore 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x+3}$ 在 $[-2, +\infty)$ 上单调递减, 故 C 错误, D 正确.

- 3. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$** 【解析】设

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4x} (x \neq 0).$$

当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{4} + \frac{1}{4x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{4x}} = \frac{1}{2}$, 当且仅当 $\frac{x}{4} = \frac{1}{4x}$, 即 $x = 1$ 时, 等号成立, 故 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 由指数函数的单调性可知, 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4} + \frac{1}{4x}}$ 的值域

为 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$;

当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, 由指数函数的单调性可知, 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4} + \frac{1}{4x}}$ 的值域为 $[\sqrt{2}, +\infty)$.

综上所述, 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4} + \frac{1}{4x}}$ 的值域为 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$.

4. 【解】(1) \because 当 $f(x) = 11$, 即 $4^x - 2^{x+1} + 3 = 11$ 时, $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$,
 $\therefore (2^x - 4)(2^x + 2) = 0$. $\because 2^x > 0$, $2^x + 2 > 2$, $\therefore 2^x - 4 = 0$, $2^x = 4$, $x = 2$.
 (2) $\because f(x) = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 3$ ($-2 \leq x \leq 1$), $\therefore f(x) = (2^x - 1)^2 + 2$, $\frac{1}{4} \leq 2^x \leq 2$.

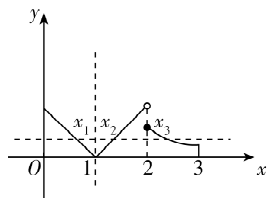
当 $2^x = 1$, 即 $x = 0$ 时, 函数的最小值 $f(x)_{\min}(x) = 2$;
 当 $2^x = 2$, 即 $x = 1$ 时, 函数的最大值 $f(x)_{\max} = 3$.

5. A 【解析】函数 $f(x) = \frac{4^x - 1}{2^{x+1}} = \frac{1}{2} \left(2^x - \frac{1}{2^x}\right)$, 其定义域为 \mathbf{R} .
 $\therefore f(-x) = \frac{1}{2} (2^{-x} - 2^x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(2^x - \frac{1}{2^x}\right) = -f(x)$, $\therefore f(x)$ 为奇函数. $\because y = 2^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, $\therefore y = \frac{1}{2^x}$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, $\therefore y = \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^{x+1}}$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. \therefore 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. 综上, $f(x)$ 为奇函数且在 \mathbf{R} 上为增函数. 故 A 正确.

6. B 【解析】画出函数 $f(x)$ 的图象, 如图所示, $f(2) = 2^{1-2} = \frac{1}{2}$, $f(3) =$

$2^{1-3} = \frac{1}{4}$. 令 $|x-1| = \frac{1}{2}$, 得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$, 令 $|x-1| = \frac{1}{4}$, 得 $x = \frac{3}{4}$ 或 $\frac{5}{4}$.
 \therefore 实数 x_1, x_2, x_3 满足 $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 3$ 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$,
 $\therefore \frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{3}{4}$ 且 $x_1 + x_2 = 2$, $\therefore (x_1 + x_2) x_1 f(x_3) = 2x_1 f(x_1) = 2x_1 (1 - x_1) = -2x_1^2 + 2x_1$, \therefore 函数 $y = -2x^2 + 2x$ 在 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ 上单调递减,

$\therefore -2x_1^2 + 2x_1 \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$, 即 $(x_1 + x_2) x_1 \cdot f(x_3)$ 的取值范围是 $\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$. 故 B 正确.



7. $(-\infty, 2]$ 【解析】首先易知函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 4x + 2}$ 的定义域为 \mathbf{R} ,
 令 $t = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$, 则 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$, 因为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 是单调递减的, 所以求函数 $t = (x-2)^2 - 2$ 的单调递减区间即可, 再利用二次函数的性质可得函数 $t = (x-2)^2 - 2$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 2]$, 即 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 4x + 2}$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 2]$.

易错警示 混淆复合函数单调性的原则

求指数型复合函数的单调性时要注意定义域以及指数函数本身的单调性.

8. 【解】(1) 设 $f(x) = a^x$, \because 指数函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(-2, 9)$, 可得 $a^{-2} = 9$, 解得 $a = \frac{1}{3}$,

$\therefore f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

- (2) $\because f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减,
 $\therefore f(-0.3) > f(0) = 1 > f(0.3)$.
 (3) 若 $f(-m^2 + m + 1) < 1 = f(0)$,
 则 $-m^2 + m + 1 > 0$, 解得 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 即实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

9. 【解】(1) \because 函数 $f(x) = b \cdot a^x$ (其中 a, b 为常数且 $a > 0, a \neq 1$) 的图象经过点 $A(1, 8), B(3, 32)$,
 $\therefore \begin{cases} a \cdot b = 8, \\ a^3 \cdot b = 32, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 4, \end{cases}$
 $\therefore f(x) = 4 \cdot 2^x = 2^{x+2}$.
 (2) 设 $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x + \left(\frac{1}{b}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x$, 若不等式 $\left(\frac{1}{a}\right)^x + \left(\frac{1}{b}\right)^x - m \geq 0$ 在 $x \in (-\infty, 1]$ 时恒成立, 则当 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $m \leq g(x)_{\min}$. $\because y = g(x)$ 在 \mathbf{R} 上是减函数, \therefore 当 $x = 1$ 时, $g(x)_{\min} = g(1) = \frac{3}{4}$, $m \leq \frac{3}{4}$, 即 m 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$.

10. 【解】(1) $\because y = f(x)$ 的图象经过点 $A(0, 2), B(1, 3)$.
 $\therefore \begin{cases} a^0 + b = 2, \\ a^1 + b = 3, \end{cases}$ 解得 $a = 2, b = 1$, 故 $f(x) = 2^x + 1$, 即 $g(x) = f(2x) - f(x) = 2^{2x} - 2^x = \left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, 所以 $g(x) \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.
 (2) ① \because 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, $\therefore \begin{cases} 1+b=0, \\ a+b=1, \end{cases}$ 解得 $a = 2, b = -1$. $\therefore a + b = 1$.

② \because 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, $\therefore \begin{cases} 1+b=1, \\ a+b=0, \end{cases}$ 解得 $a=0, b=0$ (舍去).
 综上, $a+b=1$.

11. (1) 【解】 $\because f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, $\therefore f(0)=0$, 设 $x \in (0, 1)$, 则 $-x \in (-1, 0)$, 则 $f(x) = -f(-x) = -(2^x + 2^{-x})$, 故 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 2^{-x}, & -1 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -(2^x + 2^{-x}), & 0 < x < 1. \end{cases}$

(2) 【证明】任取 $x_1, x_2 \in (-1, 0)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = 2^{x_1} + 2^{-x_1} - (2^{x_2} + 2^{-x_2}) = \frac{(2^{x_1} - 2^{x_2})(2^{x_1} 2^{x_2} - 1)}{2^{x_1} 2^{x_2}}$, $\because x_1 < x_2 < 0$, $\therefore 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0, 0 < 2^{x_1} 2^{x_2} < 1$, $\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减.

(3) 【解】由题意可知, $t \cdot 2^x \cdot f(x) < 4^x - 1$ 可化为 $t \cdot 2^x \cdot [-(2^x + 2^{-x})] < 4^x - 1$, 化简可得, $t > -\frac{4^x - 1}{4^x + 1}$. 令 $g(x) = -\frac{4^x - 1}{4^x + 1} = -1 + \frac{2}{4^x + 1}$, $\because x \in (0, 1)$, 易知 $g(x)$ 在定义域内单调递减, $\therefore g(x) < -1 + \frac{2}{4^0 + 1} = 0$, $\therefore t \geq 0$, 故实数 t 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

12. A 【解析】由 $y = x^{\frac{2}{7}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 可得 $a > c$; 由 $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ 是单调递减函数, 可得 $b < c$, 故 $a > c > b$. 故 A 正确.

13. A 【解析】由 $y = 1.1^x$ 是单调递增函数, 可得 $1.1^{1.1} > 1.1^{0.9}$, 又因为 $1.1^{1.1} > 1.1^{0.9} > 1 > 0.9^{1.1}$, 所以 $c > b > a$. 故 A 正确.

14. D 【解析】因为 $y_1 = 2^{1.8}, y_2 = 2^{3 \times 0.48} = 2^{1.44}, y_3 = 2^{1.5}$, 函数 $y = 2^x$

在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $y_1 > y_3 > y_2$. 故 D 正确.

15. A 【解析】因为 $y = x^{0.7}$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 所以 $0.7^{0.7} > \left(\frac{1}{2\ 023}\right)^{0.7}$, 又因为 $y = 0.7^x$ 是 \mathbf{R} 上的减函数, 所以 $0.7^{\frac{1}{2\ 023}} > 0.7^{0.7}$, 故 $0.7^{\frac{1}{2\ 023}} > \left(\frac{1}{2\ 023}\right)^{0.7}$, 即 $a > b$, 结合 $a = 0.7^{\frac{1}{2\ 023}} \in (0, 1)$, 可得 $c = a + \frac{1}{4a} > 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{4a}} = 1$ (等号不能成立), 所以 $c > 1 > a > b$. 故 A 正确.

16. A 【解析】因为底数 $3 \in (1, +\infty)$, 所以函数 $f(x) = 3^{(2a-1)x+3}$ 的单调性与 $y = (2a-1)x+3$ 的单调性相同. 因为 $f(x) = 3^{(2a-1)x+3}$ 在 \mathbf{R} 上是减函数, 所以 $y = (2a-1)x+3$ 在 \mathbf{R} 上是减函数, 所以 $2a-1 < 0$, 即 $a < \frac{1}{2}$, 因此 a 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$. 故 A 正确.

17. B 【解析】根据题意, 函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x \leq \frac{1}{2}, \\ (2a-1)x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.

当 $x \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = a^x$, 若 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递增, 则有 $a > 1$;

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = (2a-1)x$, 若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 所以 $2a-1 > 0$, 即 $a > \frac{1}{2}$.

同时 $\frac{1}{2}(2a-1) \geq a^{\frac{1}{2}}$, 即 $a - \frac{1}{2} \geq$

$a^{\frac{1}{2}}$, 因为 $a > 1$, 所以 $a^2 - a + \frac{1}{4} \geq a$, 即 $4a^2 - 8a + 1 \geq 0$, 解得 $a \geq \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ 或 $a \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (舍去).

综上, $a \geq \frac{2+\sqrt{3}}{2}$, 即 $a \in \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$. 故 B 正确.

18. 2 【解析】 $\because f(x)$ 是定义在 $[-2a, 3a-1]$ 上的奇函数, \therefore 定义域关于原点对称, 即 $-2a+3a-1=0$, $\therefore a=1$. \therefore 函数 $f(x) = \frac{b-2^x}{2^x+1}$ 为奇函数, $\therefore f(-x) = \frac{b-2^{-x}}{2^{-x}+1} = \frac{b \cdot 2^x - 1}{1+2^x} = -f(x) = -\frac{b-2^x}{1+2^x}$, 即 $b \cdot 2^x - 1 = -b + 2^x$, $\therefore b=1$. 故 $a+b=2$.

19. 【解】(1) ①当 $a > 1$ 时, $f(x) = a^x + b$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 则有 $\begin{cases} a+b=2, \\ a^2+b=4, \end{cases}$ 即 $a^2-a-2=0$, 解得 $a=2, b=0$;

②当 $0 < a < 1$ 时, $f(x) = a^x + b$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, 则 $\begin{cases} a+b=4, \\ a^2+b=2, \end{cases}$ 即 $a^2-a+2=0$, 无解. 综上所述, $a=2, b=0$.

(2) 由 (1) 知 $g(x) = \frac{2x^2+2}{x} = 2\left(x+\frac{1}{x}\right)$, 函数在 $(1, 2)$ 上单调递增. 由题知由 $g(t-1) > g\left(\frac{1}{2}t\right)$, 因为 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, 则 $\begin{cases} 1 < \frac{1}{2}t < 2, \\ 1 < t-1 < 2, \end{cases}$ 解得 $2 < t < 3$. 所以不等式的解集为 $\{t | 2 < t < 3\}$.

20. 【解】函数 $f(x) = ka^x - a^{-x}$ ($a > 0$ 且

$a \neq 1$) 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, 可得 $f(0) = 0$, 从而得 $k-1=0$, 即 $k=1$, 故 $f(x) = a^x - a^{-x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 由 $f(1) > 0$ 可得 $a - \frac{1}{a} > 0$, 解得 $a > 1$, 所以 $f(x) = a^x - a^{-x}$ 是增函数. 由 $f(x+2) + f(x-4) > 0$ 可得 $f(x+2) > -f(x-4) = f(4-x)$, 所以 $x+2 > 4-x$, 解得 $x > 1$, 即不等式的解集是 $(1, +\infty)$.

(2) $f(1) = \frac{3}{2}$ 得 $a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2}$, 解得 $a = 2$ 或 $a = -\frac{1}{2}$ (舍), 故 $g(x) = 2^{2x} + 2^{-2x} - 4(2^x - 2^{-x}) = (2^x - 2^{-x})^2 - 4(2^x - 2^{-x}) + 2$, 令 $t = 2^x - 2^{-x}$, 它在 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 故 $t \geq \frac{3}{2}$, 即 $g(x)$ 可转化为 $\varphi(t) = t^2 - 4t + 2$ ($t \geq \frac{3}{2}$). 函数 $y = t^2 - 4t + 2$ 图象的对称轴是直线 $t = 2 \geq \frac{3}{2}$, 故最小值为 $\varphi(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 2 = -2$.

21. (1) 【证明】当 $a = 1$ 时, 有 $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$, 定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$,

$$\text{则 } f(-x) = \frac{2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} = \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x} = -f(x).$$

综上, $f(x)$ 的定义域关于原点对称且 $f(-x) = -f(x)$, 即 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 【解】 $a < 0$ 时, 有 $2^x - a > 0$, 即 $f(x)$ 定义域为 \mathbf{R} , 结论: $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. 设对任意两个实数 x_1, x_2 , 有 $x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{2^{x_1} + a}{2^{x_1} - a} - \frac{2^{x_2} + a}{2^{x_2} - a} = \\ &= \frac{(2^{x_1} + a)(2^{x_2} - a) - (2^{x_2} + a)(2^{x_1} - a)}{(2^{x_1} - a)(2^{x_2} - a)} = \\ &= \frac{2a(2^{x_2} - 2^{x_1})}{(2^{x_1} - a)(2^{x_2} - a)}, \text{ 而 } 2^{x_2} - 2^{x_1} > 0, \end{aligned}$$

$2^{x_1} - a > 0, 2^{x_2} - a > 0, a < 0$, 则 $\frac{2a(2^{x_2} - 2^{x_1})}{(2^{x_1} - a)(2^{x_2} - a)} < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 得证.

(3) 【解】当 $a < 0$ 时, 由 (2) 知 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 结合题意

$$\text{有 } \begin{cases} f(m) = \frac{k}{2^m}, \\ f(n) = \frac{k}{2^n}, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} \frac{2^m + a}{2^m - a} = \frac{k}{2^m}, \\ \frac{2^n + a}{2^n - a} = \frac{k}{2^n}, \end{cases}$$

即 m, n 是 $\frac{2^x + a}{2^x - a} = \frac{k}{2^x}$ 的两个不同的实根. 令 $t = 2^x > 0$, 则 $t^2 + (a-k)t + ak = 0$ ($a < 0$) 在 $t > 0$ 上有两个不同

$$\text{实根, 故 } \begin{cases} -\frac{a-k}{2} > 0, \\ (a-k)^2 - 4ak > 0, \\ ak > 0, \end{cases}$$

可得 $0 < \frac{k}{a} < 3 - 2\sqrt{2}$, 所以 $\frac{k}{a}$ 的范围为 $(0, 3 - 2\sqrt{2})$.

§3 考点训练

1. C 【解析】 q : 指数函数 $f(x) = (3a-2)^x$ 是增函数, 则 $3a-2 > 1$, 解得 $a > 1$, 则 p 是 q 的必要不充分条件. 故 C 正确.

2. C 【解析】设荷叶覆盖水面的初始面积为 a , 则 x 天后荷叶覆盖水面的面积 $y = a \cdot 2^x$ ($x \in \mathbf{N}_+$), 根据题意, 令 $2(a \cdot 2^x) = a \cdot 2^{20}$, 解得 $x = 19$. 故 B 正确.

3. A 【解析】因为 $f(x) = 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ($x \in \mathbf{R}$), 所以 $f(-x) = 2^{-x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 2^x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是定义域 \mathbf{R} 上的奇函数. 因为 $y = 2^x$ 为增函数, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为减函数, 所以 $f(x)$ 为增函数. 又因为 $f(m) + f(n) > 0$, 所以 $f(m) > -f(n) = f(-n)$, 所以 $m > -n$, 所以 $m+n > 0$. 故 A 正确.

4. A 【解析】 $a = 3^{\frac{4}{3}}, b = 9^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{4}{5}}$, 因为 $y = 3^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $3^{\frac{4}{3}} > 3^{\frac{4}{5}}$, 即 $a > b$; 又因为 $a = 3^{\frac{4}{3}} = 9^{\frac{2}{3}}, c = 100^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{2}{3}}, y = x^{\frac{2}{3}}$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $10^{\frac{2}{3}} > 9^{\frac{2}{3}}$, 即 $c > a$. 故 $c > a > b$. 故 A 正确.

5. A 【解析】由奇函数的性质可知, $f(0) = 0, \therefore 1+b=0, \therefore b=-1$, 经检验, $b=-1$ 符合题意, $\therefore f(x) = a^x - a^{-x}$.

当 $a > 1$ 时, $f(x) = a^x - a^{-x}$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, $\therefore f(x)_{\max} = f(1) = a - a^{-1} = \frac{8}{3}$, 解得 $a = 3$ 或 $-\frac{1}{3}$ (舍去);

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x) = a^x - a^{-x}$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减, $\therefore f(x)_{\max} = f(-1) = a^{-1} - a = \frac{8}{3}$, 解得 $a = \frac{1}{3}$ 或 -3 (舍去).

综上所述, $a = 3$ 或 $\frac{1}{3}$. 故 A 正确.

6. A 【解析】 $f(-x) = \frac{-x}{2^{-x} + 2^x} = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数, 其图象关于原点对称, 故 B 错误; 当 $x = 1$ 时, $f(x) > 0$, 故 C 错误; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 故 D 错误.

7. 8 【解析】令 $x+2=0$, 解得 $x=-2$, 当 $x=-2$ 时, $y=-1$, 故 $P(-2, -1)$. 由点 P 满足以下条件: $P \in \{(x, y) \mid mx + ny + 1 = 0, mn > 0\}$, 得 $-2m - n + 1 = 0$, 即 $2m + n = 1$.

$m > 0, n > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)(2m+n) = 4 + \frac{n}{m} + \frac{4m}{n} \geq 4 + 2\sqrt{4} = 8$, 当且仅当 $m = \frac{1}{4}, n = \frac{1}{2}$

时, 等号成立, 故 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 8.

8. 【解】 (1) 对于函数 $f(2x+1) = 3a^{x+4} + 5 (a > 0, a \neq 1)$, 令 $2x+1=t$, 求得 $x = \frac{t-1}{2}$, $\therefore f(t) = 3a^{\frac{t+7}{2}} + 5$, 故有 $f(x) = 3a^{\frac{x+7}{2}} + 5$. 令 $\frac{x+7}{2} = 0$, 求得 $x = -7, f(x) = 8$, 可得 $f(x)$ 的图象经过定点 $(-7, 8)$.

(2) 原不等式 $f(x) > \frac{3}{a^2} + 5$, 可化为

$$3 \cdot a^{\frac{x+7}{2}} + 5 > \frac{3}{a^2} + 5, \therefore a^{\frac{x+7}{2}} > a^{-2}.$$

当 $a > 1$ 时, $\frac{x+7}{2} > -2$, 解得 $x > -11$;

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{x+7}{2} < -2$, 解得 $x < -11$.

综上, x 的取值范围为 $\{x | x \neq -11\}$

9. 【解】 (1) $\because f(x) = m^x$ 的图象过点 $(3, 8)$, $\therefore m^3 = 8$, 解得 $m = 2$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = 2^x$, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[2, 4]$, 即 $A = [2, 4]$;

当 $x \in [1, 2)$ 时, $g(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{4} - k, \frac{1}{2} - k\right]$, 即 $B = \left[\frac{1}{4} - k, \frac{1}{2} - k\right]$.

$\because x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要条件,

$$\therefore B \subseteq A, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{4} - k \geq 2, \\ \frac{1}{2} - k < 4, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{7}{2} < k \leq -\frac{7}{4},$$

\therefore 实数 k 的取值范围是 $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{4}\right]$.

10. 【解】 (1) $\because f(x)$ 是指数函数, $\therefore 3a^2 - 10a + 4 = 1$, 解得 $a = 3$ 或 $a = \frac{1}{3}$, 又 $\because f(x)$ 在其定义域内单调递增, $\therefore a = 3, \therefore f(x) = 3^x$.

(2) $g(x) = 3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 3 = (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x - 3$, $\because x \in [0, 2]$, $\therefore 3^x \in [1, 9]$, 令 $t = 3^x, t \in [1, 9]$, $\therefore g(t) = t^2 - 4t - 3, t \in [1, 9]$, 易知 $y = t^2 - 4t - 3$ 的图象关于直线 $t = 2$ 对称, $\therefore g(t)_{\min} = g(2) = -7$, $g(t)_{\max} = g(9) = 9^2 - 4 \times 9 - 3 = 42$, $\therefore g(x)$ 的值域为 $[-7, 42]$.

11. 【解】 (1) 若函数 $F(x) = f(x) + af(-x)$ 为偶函数, 则 $F(-x) = f(-x) + af(x) = F(x) = f(x) + af(-x)$ 恒成立, 解得 $a = 1$.

若函数 $F(x) = f(x) + af(-x)$ 为奇函数, 则 $F(-x) = f(-x) + af(x) = -F(x) = -f(x) - af(-x)$ 恒成立, 解得 $a = -1$.

综上, $a = 1$ 时, $F(x) = f(x) + af(-x)$ 是偶函数; $a = -1$ 时, $F(x) = f(x) + af(-x)$ 是奇函数.

(2) 易知 $f(x) = 2^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 由 $f(x+1) \leq f[(2x+a)^2]$ 得 $x+1 \leq (2x+a)^2$ 恒成立, $\because a > 0$, 且 $x \in [0, 15]$, \therefore 问题等价于

$\sqrt{x+1} \leq 2x+a$ 恒成立, $\therefore a \geq (-2x + \sqrt{x+1})_{\max}$. 设 $m(x) = -2x + \sqrt{x+1}$, 令 $\sqrt{x+1} = t$, 则 $x = t^2 - 1$, $t \in [1, 4]$, $\therefore m(t) = -2(t^2 - 1) + t = -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$. \therefore 当 $t = 1$ 时, $m(x)_{\max} = 1$, 即 $a \geq 1$, 故实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

(3) $G(x) = 2^x + a \cdot 2^{2x}, x \in (-\infty, 0]$, 令 $2^x = t, \because x \in (-\infty, 0], \therefore t \in (0, 1], 2^x + a \cdot 2^{2x} = at^2 + t (0 < t \leq 1)$.

当 $a = 0$ 时, $G(x)_{\max} = 1$;

当 $a \neq 0$ 时, 令 $g(t) = at^2 + t = a\left(t + \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a} (0 < t \leq 1)$,

若 $a > 0, t = 1$ 时, $g(t)$ 取得最大值, 此时最大值为 $g(1) = a + 1$;

若 $-\frac{1}{2} < a < 0$, 易知 $t = 1$ 时 $g(t)$ 取得最大值, 此时最大值为 $g(1) = a + 1$;

若 $a \leq -\frac{1}{2}$, 易知 $t = -\frac{1}{2a}$ 时 $g(t)$ 取得最大值, 此时最大值为 $g\left(-\frac{1}{2a}\right) = -\frac{1}{4a}$.

综上, $G(x)_{\max} = H(a) = \begin{cases} -\frac{1}{4a}, & a \leq -\frac{1}{2}, \\ a+1, & a \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$

第三章 综合检测

1. B 【解析】 $3^\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^\pi + (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} + 1^{\sqrt{5}} = \left(3 \times \frac{1}{3}\right)^\pi + 2^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} + 1 = 1 + 16 + 1 = 18$. 故 B 正确.

2. D 【解析】 因为 $2, 5, m$ 是某三角形三边的长, 所以 $5 - 2 < m < 5 + 2$, 即 $3 < m < 7$, 所以 $\sqrt[3]{(m-3)^3} + \sqrt[4]{(m-7)^4} = m - 3 + |m - 7| = m - 3 + 7 - m = 4$. 故 D 正确.

3. C 【解析】 \because 函数 $y = (m^2 - 2m - 2) \cdot m^x$ 是指数函数, $\therefore \begin{cases} m^2 - 2m - 2 = 1, \\ m > 0, \\ m \neq 1, \end{cases}$ 解得 $m = 3$. 故 C 正确.

4. B 【解析】由题意可知,

$$\begin{cases} m(0) = a = 500, \\ m(5) = a \cdot 2^{5k} = 2\,000, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} a = 500, \\ 2^{5k} = 4, \end{cases} \quad \text{则 } m(10) = a \cdot 2^{10k} = a(2^{5k})^2 = 8\,000. \text{ 故 B 正确.}$$

5. D 【解析】令 $x+1=0$, 则 $x=-1$, 代入函数 $f(x) = a^{x+1}-1 (a>1)$, 解得 $f(x)=0$, 则函数 $f(x) = a^{x+1}-1 (a>1)$ 的图象必经过点 $(-1, 0)$. 故 D 正确.

6. C 【解析】 \because 当 $a>1$ 时, 函数 $y = a^x - 2 (a>0 \text{ 且 } a \neq 1, -1 \leq x \leq 1)$ 是增函数, \therefore 其值域是 $[a^{-1}-2, a-2]$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{a}-2 = -\frac{5}{3}, \\ a-2 = 1, \end{cases} \quad \text{解得 } a=3;$$

当 $0<a<1$ 时, 函数 $y = a^x - 2 (a>0 \text{ 且 } a \neq 1, -1 \leq x \leq 1)$ 是减函数, \therefore 其值域是 $[a-2, a^{-1}-2]$,

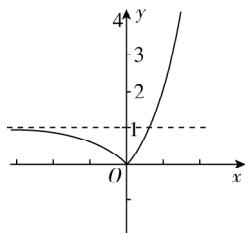
$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{a}-2 = 1, \\ a-2 = -\frac{5}{3}, \end{cases} \quad \text{解得 } a = \frac{1}{3}.$$

综上所述, 可得实数 $a=3$ 或 $\frac{1}{3}$. 故 C 正确.

7. A 【解析】因为 $y=3^x$ 为增函数, 所以 $c = \sqrt{243} = 3^{\frac{5}{2}} > 3^{2.4} = 27^{0.8} = b$, 即 $b < c$, 又因为 $y=0.9^x$ 为减函数, 所以 $a = 0.9^2 < 0.9^0 = 1 = 27^0 < 27^{0.8} = b$, 即 $a < b$, 所以 $a < b < c$. 故 A 正确.

8. D 【解析】 $\because f(x) = |3^x - 1| = \begin{cases} 3^x - 1, & x \geq 0, \\ 1 - 3^x, & x < 0, \end{cases}$ $\therefore f(x)$ 的图象如图所示. 又 $c < b < a$, 若 $0 < c < b < a$, 则 $f(c) < f(b) < f(a)$, 这与已知 $f(c) > f(a) > f(b)$ 矛盾. 同理, $c < b < a < 0$ 也不成立. \therefore 只有 $c < 0 < b < a$ 或 $c < b < 0 < a$ 这两种情况, $\therefore 3^c < 3^b, 3^c < 1, 3^a > 1$, 又 $\because f(c) - f(a) > 0$, 即 $1 - 3^c -$

$(3^a - 1) > 0$, 则 $3^c + 3^a < 2$. 故 D 正确.



9. BC 【解析】令 $x+2=0$, 则 $x=-2$, 即 $y = a^0 - 2 \times (-2) = 5$, 所以函数 $y = a^{x+2} - 2x (a>0, a \neq 1)$ 的图象恒过定点 $A(-2, 5)$, 故 A 错误; $|x-1| > 1$, 解得 $x > 2$ 或 $x < 0$, 由于 $\{x|x > 3\}$ 是 $\{x|x > 2 \text{ 或 } x < 0\}$ 的真子集, 则“ $|x-1| > 1$ ”是“ $x > 3$ ”的必要而不充分条件, 故 B 正确; 命题“ $\exists x_0 \in [0, 1], x_0^2 + x_0 \geq 1$ ”的否定为“ $\forall x \in [0, 1], x^2 + x < 1$ ”, 故 C 正确;

$y = \sqrt{2^x + 2} + \frac{1}{\sqrt{2^x + 2}}$, 令 $t = \sqrt{2^x + 2} > \sqrt{2}$, 则 $y = t + \frac{1}{t}, t > \sqrt{2}$, 由对勾函数的性质知 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增, 故 $y > \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2$, 故 D 错误.

10. AD 【解析】 \because 函数图象过点 $(1, 3)$, $\therefore a=3$, \therefore 函数解析式为 $y=3^t$, \therefore 浮萍每月的增长率为 $\frac{3^{t+1}-3^t}{3^t} = \frac{2 \times 3^t}{3^t} = 2$, 故 A 正确; \because 函数 $y=3^t$ 是指数函数, 对应函数的图象是曲线, \therefore 浮萍每月增加的面积不相等, 故 B 错误; 当 $t=4$ 时, $y=3^4 = 81 > 80$, 故 C 错误; $\because 3^{t_1} = 2, 3^{t_2} = 4, 3^{t_3} = 8, \therefore t_1 = \log_3 2, t_2 = \log_3 4, t_3 = \log_3 8$, 又 $\because 2 \log_3 4 = \log_3 16 = \log_3 2 + \log_3 8$, $\therefore 2t_2 = t_1 + t_3$, 故 D 正确.

11. BC 【解析】 $x=2$ 时函数 $y=2^x$

的函数值与函数 $y=x^2$ 的函数值相等, 故 A 错误;

对函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = x^{\frac{1}{2}}$ 而言, 当 $x=1$ 时, $\left(\frac{1}{2}\right)^1 < 1^{\frac{1}{2}}$, 因此存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $a^{x_0} < x_0^a (a>0, a \neq 1)$, 故 B 正确;

在区间 $(0, +\infty)$ 上, 随着 x 的增大, 指数函数 $y = a^x (a>1)$ 的增长速度会超过并远远大于 $y = x^a (a>1)$ 的增长速度, 故 C 正确; “指数爆炸”是指指数型函数 $y = a \cdot b^x + c (a>0, b>1)$ 增长速度越来越快的形象比喻, 故 D 错误.

12. $[4, +\infty)$ 【解析】根据函数有意义的条件可得, $2^{x-1} - 8 \geq 0$, 即 $2^{x-1} \geq 2^3$, 因为函数 $y=2^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $x-1 \geq 3$, 解得 $x \geq 4$. 故函数的定义域为 $[4, +\infty)$.

13. $(-\infty, 0)$ 【解析】 $p: \forall a \in [-1, 1]$, 不等式 $2^{ax} > 2^{2x+a-1}$ 成立, 则由 $y=2^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增可得 $ax > 2x+a-1$, 即 $a(x-1)+1-2x > 0$ 对任意 $a \in [-1, 1]$ 恒成立. 设 $g(a) = a(x-1)+1-2x, -1 \leq a \leq 1$, 可得 $g(-1) > 0$ 且 $g(1) > 0$, 即 $-x+1+1-2x > 0$ 且 $x-1+1-2x > 0$, 解得 $x < 0$.

14. $\frac{1}{2}$ 或 2 【解析】若 $0 < a < 1$, 则函数 $f(x) = a^x$ 在 $[1, 3]$ 上单调递减, $f(x)_{\max} = a, f(x)_{\min} = a^3$. 由题意得 $a - a^3 = \frac{3a^2}{2}$, 解得 $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = -2$ (舍去); 若 $a > 1$, 则函数 $f(x) = a^x$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增, $f(x)_{\max} = a^3, f(x)_{\min} = a$. 由题意得 $a^3 - a = \frac{3a^2}{2}$, 解得 $a = 2$ 或 $a = -\frac{1}{2}$ (舍去). 综上所述, $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = 2$.

15. (1)【解】 $\because f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, $\therefore f(0) = \frac{b-1}{4} = 0$, 解得 $b=1$. 经检验, 符合要求, $\therefore b=1$.

(2)【证明】由 (1) 知 $f(x) = -\frac{2^x-1}{2(2^x+1)}$. 任取 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 不妨令 $x_1 < x_2$, 则 $2^{x_2}-2^{x_1} > 0, (2^{x_1}+1) \cdot (2^{x_2}+1) > 0$. $\therefore f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1} - \frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1} \right) = \frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)} > 0$, $\therefore f(x_1) > f(x_2)$. \therefore 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是减函数.

16.【解】(1) 因为函数 $f(x) = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的图象过点 $(3, 8)$, 所以 $f(3) = a^3 = 8$, 解得 $a = 2$, 因此, $f(x) = 2^x$.

(2) $g(x) = (2^x)^2 - 2 \times 2^x + 5$, 令 $t = 2^x$, 因为 $x \in [-1, 2]$, 所以 $t \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$. 令 $h(t) = t^2 - 2t + 5 = (t-1)^2 + 4$, 易知 $y = t^2 - 2t + 5$ 图象的对称轴为 $t = 1$, 所以当 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时, 函数 $h(t)$ 单调递减, 此时 $x \in [-1, 0]$;

当 $t \in (1, 4]$ 时, 函数 $h(t)$ 单调递增, 此时 $x \in (0, 2]$.

又因为函数 $t = 2^x$ 单调递增, 所以函数 $g(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上的单调递减区间为 $[-1, 0]$, 单调递增区间为 $(0, 2]$. 易知 $x \in [-1, 2]$ 时, $g(x)_{\min} = g(0) = 4$. 又因为 $g(-1) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + 4 = \frac{17}{4}$, $g(2) = (4-1)^2 + 4 = 13$, 故 $g(x)_{\max} = 13$, 所以函数 $g(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上的值域为 $\left[\frac{17}{4}, 13\right]$.

17.【解】(1) $\because f(x) = (k+2)a^x + 2 - b (a > 0, a \neq 1)$ 是指数函数, $\therefore k+2=1$ 且 $2-b=0$. $\therefore k=-1$ 且 $b=2$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 则 $f(2x-5) > f(3x-1)$ 即 $a^{2x-5} > a^{3x-1}$.

① 当 $a > 1$ 时, $f(x) = a^x$ 单调递增, 则不等式等价于 $2x-5 > 3x-1$, 解得 $x < -4$;

② 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 单调递减, 则不等式等价于 $2x-5 < 3x-1$, 解得 $x > -4$.

综上, 当 $a > 1$ 时, 不等式解集为 $\{x | x < -4\}$; 当 $0 < a < 1$ 时, 不等式解集为 $\{x | x > -4\}$.

18.【解】(1) \because 函数 $f(x) = (a^2 - 4a + 4) \cdot a^x$ 是指数函数, $\therefore a^2 - 4a + 4 = 1 (a > 0$ 且 $a \neq 1)$, 解得 $a = 3$, $\therefore f(x) = 3^x$, $\therefore y = (3^x - 2) \cdot (3^x + 1)$, 令 $t = 3^x$, 则 $y = (t-2) \cdot (t+1) = t^2 - t - 2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$, 由 $x \in [0, 1]$ 可得 $t \in [1, 3]$, 则 $y = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增, $\therefore y \in [-2, 4]$, 即函数 $y = [f(x) - 2] \cdot [f(x) + 1]$ 在 $[0, 1]$ 上的值域为 $[-2, 4]$.

(2) $\because g(x) = \frac{3^x - m}{3^x + m}$ 是定义域为

\mathbf{R} 的奇函数, $\therefore g(-x) = -g(x)$,

$g(-x) = \frac{3^{-x} - m}{3^{-x} + m} = \frac{1 - m3^x}{1 + m3^x} = -g(x) = \frac{m - 3^x}{m + 3^x}$, 解得 $m = 1 (m = -1$ 舍去),

$\therefore g(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1} = 1 - \frac{2}{3^x + 1}$. $g(x)$ 是增函数.

下面用定义证明: 设任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $g(x_1) - g(x_2) = \left(1 - \frac{2}{3^{x_1} + 1}\right) - \left(1 - \frac{2}{3^{x_2} + 1}\right) = \frac{2(3^{x_1} - 3^{x_2})}{(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1)}$, $\because x_1 < x_2, \therefore 3^{x_1} - 3^{x_2} < 0$, 又 $(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1) > 0$, $\therefore g(x_1) - g(x_2) < 0$, 即 $g(x_1) < g(x_2)$, $\therefore g(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$ 是 \mathbf{R} 上的增函数.

$3^{x_2} < 0$, 又 $(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1) > 0$, $\therefore g(x_1) - g(x_2) = \frac{2(3^{x_1} - 3^{x_2})}{(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1)} < 0$, 即 $g(x_1) < g(x_2)$,

$\therefore g(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$ 是 \mathbf{R} 上的增函数.

19.【解】(1) 若函数 $g(x) = \frac{1}{3^x} - 2$ 为

“类指数函数”, 则在定义域内存在两个不同的实数 x 满足方程

$f(x) - g(x) = 2^x - \frac{1}{3^x} + 2 = 0$. 设函数

$F(x) = f(x) - g(x)$,

由于函数 $y = 2^x$ 与 $y = -\frac{1}{3^x}$ 在 \mathbf{R} 上

均单调递增, 所以 $F(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $F(x)$ 至多有一个零点, 不能满足方程 $f(x) -$

$g(x) = 2^x - \frac{1}{3^x} + 2 = 0$ 有两个不同

的实数解, 所以 $g(x)$ 不是“类指数函数”.

(2) 若函数 $h(x) = \frac{a}{2^x - a - 1}$ 为“类

指数函数”, 则方程 $f(x) - h(x) =$

0 有两个不同的实数根, 即方程

$2^x - \frac{a}{2^x - a - 1} = 0$ 有两个不同的实

数根, 整理得 $(2^x)^2 - (a+1) \cdot 2^x -$

$a = 0$, 设 $t = 2^x$, 则方程 $t^2 - (a+1) \cdot$

$t - a = 0$ 有两个不等的正实根,

由 $\Delta = (a+1)^2 + 4a > 0$, 解得 $a < -3 - 2\sqrt{2}$ 或 $a > -3 + 2\sqrt{2}$;

由 $t_1 + t_2 = a+1 > 0$, 解得 $a > -1$;

由 $t_1 t_2 = -a > 0$, 解得 $a < 0$.

综上, $-3 + 2\sqrt{2} < a < 0$. 故实数 a 的取值范围为 $(-3 + 2\sqrt{2}, 0)$.